INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://www.iheb.org

Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

4 mai 2008

La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en **français** *ou en* **anglais**, *seront prises en compte dans la note finale. La durée de la composition est de 4 heures.*

Exercice 1 Soient deux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+$ celui des nombres réels strictement positifs.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$:

$$\text{(i) } f(x + g(y)) = f(x) \cdot y$$
$$\text{(ii) } g(y \cdot f(x)) = g(y) + x$$

1.a) Prouver que pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$ avec $x \neq x'$ on a $f(x) \neq f(x')$, et que pour tous $y, y' \in \mathbb{R}_+$ tels que $y \neq y'$, on a $g(y) \neq g(y')$.

1.b) Prouver que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+$ on a $g(f(x)) = x$ et $f(g(y)) = y$.

1.c) Prouver que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = g(y)$.

1.d) Prouver que pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$ on a $f(x + x') = f(x) \cdot f(x')$ et que pour tous $y, y' \in \mathbb{R}_+$ on a $g(y \cdot y') = g(y) + g(y')$. Donner un exemple de telles fonctions non-constantes f et g.

Exercice 2 Soit ABC un triangle et soit I le centre de son cercle inscrit. Soient P et Q les points de contact du cercle inscrit respectivement avec les côtés AB et AC. Les droites BI et CI rencontrent la droite PQ respectivement aux points K et L.

2.a) Montrer que le cercle circonscrit au triangle ILK est tangent au cercle inscrit dans le triangle ABC si, et seulement si, $\sin \frac{\angle BAC}{2} = \sin \frac{\angle CBA}{2} \cdot \sin \frac{\angle ACB}{2}$.

2.b) En déduire que le cercle circonscrit au triangle ILK est tangent au cercle inscrit dans le triangle ABC si, et seulement si, $AB + AC = 3 \cdot BC$.

Exercice 3 Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers et soit m un entier strictement positif. On définit la suite de polynômes $P_n(x)$ par $P_1(x) = P(x)$ et $P_n(x) = P_{n-1}(P(x))$ pour $n \geq 2$.

3.a) Prouver que si $a \equiv b \pmod{m}$, alors on a $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

3.b) En déduire que si $P(a) \equiv a \pmod{m}$, alors pour tout n, $P_n(a) \equiv a \pmod{m}$.

Supposons maintenant que pour tout entier strictement positif a, $P(a) > a$ et que pour tout entier $m > 1$, il existe au moins un terme de la suite $P(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$, . . . qui est divisible par m.

3.c) Prouver que $P(1) = 2$. (*Indication : on pourra considérer la différence* $P(1) - 1$)

3.d) Prouver par récurrence que pour tout entier strictement positif a, $P(a) = a + 1$.

Supposons maintenant que pour tout entier a, $P(a)$ est non nul et que pour tout entier $m > 1$, il existe au moins un terme de la suite $P(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$, . . . qui est divisible par m.

3.e) Montrer que chaque entier m divise une infinité de termes de cette suite. En déduire que les termes de la suite sont tous distincts.

3.f) Prouver que $P(1) = 2$, puis que $P(2) = 3$.
(*Indication : on pourra considérer* $P(1) - 1$, $P(P(1)) - P(1)$ *et* $P(P(1)) - 1$)

3.g) Prouver que pour tout entier $a \geq 1$, $P(a) = a+1$. En déduire que pour tout réel x, $P(x) = x+1$.

Tournez la page

Exercice 4 Une personne écrit à n correspondants des lettres personnelles, met chaque lettre dans une enveloppe, puis écrit les adresses au hasard. L'objectif du problème est de calculer le nombre de différentes manières d'écrire les adresses afin qu'au moins une lettre parvienne au bon destinataire.

On désigne par $|A|$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini A. Si A et B sont deux ensembles, $A \cup B$ désigne leur réunion et $A \cap B$ leur intersection. On admet la formule suivante :

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} ... \cap A_{i_k}|$$

4.a) Donner rapidement la réponse du problème pour le cas particulier $n = 3$.

4.b) Combien de possibilités existent-t-il au total pour écrire les n adresses sur les n enveloppes?

4.c) Dans combien de possibilités le j-ème destinataire recevra la lettre qui lui a été destinée? On note A_j l'ensemble de ces possibilités.

4.d) Combien de manières différentes existent-t-il pour écrire les adresses sur les enveloppes pour que k destinataires *donnés* reçoivent leurs lettres?

4.e) En utilisant la formule ci-dessus, calculer le nombre de possibilités pour qu'au moins une lettre parvienne à son vrai destinataire.

Fin

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES
POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE
http://www.iheb.org

Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

May 4th 2008

All the answers must be given in **English** *or in* **French**. *The clarity and precision will be taken into account for the final grade.Time limit : 4 hours.*

Exercise 1 Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ and $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ be two functions, where $\mathbb{R}$ denotes the set of real numbers and $\mathbb{R}_+$ denotes the subset of strictly positive numbers.

Suppose that for all $x \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}_+$:

$$\text{(i) } f(x + g(y)) = f(x) \cdot y$$
$$\text{(ii) } g(y \cdot f(x)) = g(y) + x$$

1.a) Show that for all $x, x' \in \mathbb{R}$ with $x \neq x'$ we have $f(x) \neq f(x')$, and that for all $y, y' \in \mathbb{R}_+$ with $y \neq y'$, we have $g(y) \neq g(y')$.

1.b) Show that for all $x \in \mathbb{R}$ and $y \in \mathbb{R}_+$ we have $g(f(x)) = x$ and $f(g(y)) = y$.

1.c) Show that for all $y \in \mathbb{R}_+$, there exists $x \in \mathbb{R}$ such that $y = f(x)$, and that for all $x \in \mathbb{R}$, there exists $y \in \mathbb{R}_+$ such that $x = g(y)$.

1.d) Show that for all $x, x' \in \mathbb{R}$ we have $f(x + x') = f(x) \cdot f(x')$ and that for all $y, y' \in \mathbb{R}_+$ we have $g(y \cdot y') = g(y) + g(y')$. Give an example of such non-constant functions f and g.

Exercise 2 Let ABC be a triangle and let I be the center of its inscribed circle. Let P and Q be the points where the inscribed circle meets AB and AC, respectively. The lines BI and CI meet the line PQ at points K and L, respectively.

2.a) Show that the circumscribed circle of the triangle ILK is tangent to the inscribed circle of the triangle ABC if, and only if, $\sin \frac{\angle BAC}{2} = \sin \frac{\angle CBA}{2} \cdot \sin \frac{\angle ACB}{2}$.

2.b) Deduce that the circumscribed circle of the triangle ILK is tangent to the inscribed circle of the triangle ABC if, and only if, $AB + AC = 3 \cdot BC$.

Exercise 3 Let $P(x)$ be a polynomial with integer coefficients and let m be a positive integer. We define the sequence of polynomials $P_n(x)$ by $P_1(x) = P(x)$ and $P_n(x) = P_{n-1}(P(x))$ for $n \geq 2$.

3.a) Show that if $a \equiv b \pmod{m}$, then $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

3.b) Deduce that if $P(a) \equiv a \pmod{m}$, then for all n, $P_n(a) \equiv a \pmod{m}$.

Suppose now that for every strictly positive integer a, $P(a) > a$ and that for every integer $m > 1$, there exists at least one term of the sequence $P(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$, . . . which is divisible by m.

3.c) Show that $P(1) = 2$. (*Indication : consider the difference* $P(1) - 1$)

3.d) Show by induction that for every strictly positive integer a, $P(a) = a + 1$.

Suppose now that for every integer a, $P(a)$ is non zero, and that for every integer $m > 1$, there exists at least one term of the sequence $P(1)$, $P_2(1)$, $P_3(1)$, . . . which is divisible by m.

3.e) Show that every integer m divides infinitely many terms of the above sequence. Deduce that the terms of the sequence are all distinct.

3.f) Show that $P(1) = 2$, then show that $P(2) = 3$.
(*Indication : consider* $P(1) - 1$, $P(P(1)) - P(1)$ *and* $P(P(1)) - 1$)

3.g) Show that for all integers $a \geq 1$, $P(a) = a+1$. Deduce that for all real numbers x, $P(x) = x+1$.

Turn the page

Exercice 4 A person writes personal letters for n friends, puts each letter in an envelope and then writes the addresses randomly on the envelopes. The goal of this problem is to determine the number of different ways to write the addresses so that at least one friend receives the right letter.

We denote by $|A|$ the number of elements of a finite set A. If A and B two sets, $A \cup B$ denotes their union and $A \cap B$ denotes their intersection. The following formula will be admitted :

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} ... \cap A_{i_k}|$$

4.a) Give quickly the answer of the problem for $n = 3$.

4.b) What is the total number of different ways to write n addresses on n envelopes?

4.c) In how many of these different ways the j-th friend will receive the right letter? We denote by A_j the set of these situations.

4.d) What is the total number of different ways to write the addresses so that k *given* friends will all receive their letters?

4.e) By using the above formula, compute the number of different ways so that at least one friend receives the right letter.

End