INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://balkanski-foundation.org

Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

14 mai 2011

Les quatres exercices sont indépendants. La clarté et la précision de la rédaction, qui doit être obligatoirement en **français** *ou en* **anglais**, *seront prises en compte dans la note finale.*

La durée de la composition est de 4 heures.

Exercice I On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Existe-t-il une fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \geq 2$, $f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$?

Exercice II Soit ABC un triangle et M le milieu de BC. La bissectrice de l'angle $\sphericalangle BAC$ rencontre BC en N. La droite perpendiculaire à AN en N rencontre respectivement MA en Q, et BA en P. La perpendiculaire à AB en P rencontre AN en O. Prouver que les droites OQ et BC sont perpendiculaires.

Exercice III Trouver tous les couples d'entiers positifs (a, b) tels que $a^a b^b$ se termine exactement avec 1102 zéros (*on pourra commencer par démontrer que a et b sont pairs et qu'exactement l'un d'entre eux est multiple de* 5).

Exercice IV L'internat d'un lycée français de forme rectangulaire de taille $a \times b$, possède ab chambres carrées de dimension 1×1. Dans chaque chambre vit un pensionnaire et au début de l'année exactement N pensionnaires parlent bulgare. Deux chambres sont dites voisines, si elles ont un mur en commun. Lorsqu'un pensionnaire a au moins deux voisins qui parlent bulgare, il finit par parler bulgare lui aussi, et ainsi de suite. La question est de savoir si tout le monde parlera bulgare à la fin de l'année.

1. On note $N(a, b)$ le nombre maximal autorisé de pensionnaires parlant bulgare au début de l'année, pour qu'à la fin de l'année il reste encore au moins un pensionnaire qui ne parle pas bulgare, et ceci indépendamment de la disposition initiale des pensionnaires parlant bulgare.
   (a) Trouver $N(2, 2)$, $N(1, 5)$ et $N(1, 6)$.
   (b) Trouver $N(3, 3)$ et $N(4, 4)$.
   (c) Trouver $N(1, b)$ en fonction de b.
   (d) Si $a = b = N$, trouver une disposition des pensionnaires parlant bulgare, afin qu'à la fin de l'année tout le monde parle bulgare.
   (e) Montrer que $N(a, a) = a - 1$.
   (f) Trouver $N(a, b)$ en fonction de a et b.
2. On suppose qu'au début de l'année, il n'existe pas de pensionnaires voisins parlant bulgare et qu'il n'existe pas de pensionnaires ayant trois voisins parlant bulgare.
   (a) Si $a = b = N = 3$, montrer qu'à la fin de l'année tout le monde parlera bulgare.
   (b) Si $a = b = 4$ et $N = 5$, montrer qu'à la fin de l'année tout le monde parlera bulgare. Est-ce que cela reste vrai pour $N = 4$?
   (c) Si $a = b = 6$ et $N = 11$, montrer qu'à la fin de l'année tout le monde parlera bulgare. Est-ce que cela reste vrai pour $N = 10$?

INSTITUT DES HAUTES ÉTUDES

POUR LE DÉVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http://balkanski-foundation.org

Concours Général de Mathématiques

"Minko Balkanski"

May 14th 2011

The four exercises are independent. All the answers must be given in **English** *or in* **French**. *The clarity and precision will be taken into account for the final grade. Time limit : 4 hours.*

Exercise I Let $\mathbb{N}^*$ denote the set of strictly positive integers. Is there a function f from $\mathbb{N}^*$ to $\mathbb{N}^*$ such that for all $n \geq 2$, $f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$?

Exercise II Let ABC be a triangle and the point M be the middle of BC. The bisector of $\sphericalangle BAC$ intersects BC in the point N. The orthogonal line to AN from N intersects MA and BA in Q and P respectively. The orthogonal line to AB from P interestsAN in O. Prove that OQ is orthogonal to BC.

Exercise III Find all couples of positive integers (a, b) such that $a^a b^b$ ends by exactly 1102 zeros (*one may first show that* a *and* b *are both even and that exactly one of them is multiple of* 5).

Exercise IV A student residence in France has a surface area of $a \times b$ and has exactly ab rooms each one with dimension 1×1. There is exactly one person living in every room and in the beginning of the year N of them speak Bulgarian. Two persons are said to be neighbors if their rooms have a wall in common. If a person has at least two Bulgarian speaking neighbors he also learns to speak Bulgarian, and so on. We would like to find out whether everyone in the student residence would be able to speak Bulgarian by the end of the year.

1. We denote by $N(a, b)$ the maximal number of Bulgarian speaking people in the beginning of the year such that at the end of the year there is at least one person who does not speak Bulgarian and this regardless of the initial disposition of Bulgarian speaking people.
   (a) Find $N(2, 2)$, $N(1, 5)$ and $N(1, 6)$.
   (b) Find $N(3, 3)$ and$N(4, 4)$.
   (c) Find $N(1, b)$ as a function of b.
   (d) If $a = b = N$, prove that there is at least one initial disposition of Bulgarian speaking people such that at the end of the year everyone speaks Bulgarian.
   (e) Prove that $N(a, a) = a - 1$.
   (f) Find $N(a, b)$ as a function of a and b.
2. Suppose that in the beginning of the year there are not Bulgarian speaking neighbors and that there are no people having three or more Bulgarian speaking neighbors.
   (a) If $a = b = N = 3$, show that by the end of the year everyone will be able to speak Bulgarian.
   (b) If $a = b = 4$ and $N = 5$, show that by the end of the year everyone will be able to speak Bulgarian. Does that remain true for $N = 4$?
   (c) If $a = b = 6$ and $N = 11$, show that by the end of the year everyone will be able to speak Bulgarian. Does that remain true for $N = 10$?