INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://balkanski-foundation.org/

Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

9 Mai 2015

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право са френски и английски речници.

Задачите дават еднакъв брой точки. При оценяването на задачите голяма тежест ще имат *яснотата и стилът* на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете точни и *кратки*. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. *Пишете само на езика, който сте избрали* (френски или английски).

При намиране на грешка в условията на задачите отбележете я в работата си и продължете *без да повдигате въпроси към квесторите*.

Класирането ще бъде изложено на сайта на Фондация Миню Балкански в началото на месец юни. Ако имате въпроси и коментари можете да ги насочите към svilen.iskrov@gmail.com. С първенците ще се свържем чрез e-mail или по телефон. Бъдете сигурни да попълните правилно информацията за контакт.

Разполагате с 4 часа. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Soit ABC un triangle et P un point du côté $[BC]$. Les points M et N situés, respectivement, sur $[AB]$ et $[AC]$ sont tels que (MN) n'est pas parallèle à (BC) et $AMPN$ est un parallélogramme. La droite (MN) coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en R et S. Montrer que cercle circonscrit au triangle RPS est tangent à (BC).

Problème II

Trouver le plus grand entier $n \geq 3$, vérifiant : "pour tout entier k avec $2 \leq k \leq n$, si k et n sont premiers entre eux, alors k est un nombre premier."

Problème III

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers distincts et $P(X)$ le polynôme suivant :

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n) - 1$$

Montrer que $P(X)$ est irréductible, en tant que polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.

Problème IV

Le but du problème est de démontrer le théorème de Howie sur les applications d'un ensemble fini dans lui-même. Dans tout le problème X est un ensemble fini non vide.

Définitions : Une fonction est appelée surjective si chaque point de l'espace d'arrivée admet au moins un antécédent et injective si elle prend des valeurs différentes sur chaque deux points différents. Autrement dit elle est injective si chaque point de l'espace d'arrivée admet, au plus, un antécédent. Finalement, une fonction est bijective si elle est injective et surjective.

1. Soit σ une permutation de X, c'est-à-dire une application bijective de X dans lui-même. On dit qu'une permutation σ' est un cycle s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X^n$ tels que $\sigma'(a_i) = a_{i+1}$ pour chaque $i \leq n-1$, $\sigma'(a_n) = a_1$ et tous les autres points sont fixes. On appelle son support l'ensemble des $a \in X$ tels que $\sigma'(a) \neq a$, c'est-à-dire l'ensemble des a_i. Montrer que σ peut s'écrire comme un produit de cycles à supports disjoints(d'intersections deux à deux vides).
2. Soit $D \subset X$ et $\theta : D \to X$ une application injective et non surjective. On suppose $\theta(D) \subset D$. Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de X dans X vérifiant $p_i = p_i \circ p_i$ pour tout i et telles que la restriction à D de leur produit $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$ coïncide avec θ.

3. Montrer que la conclusion de la question précédente reste vraie sans l'hypothèse $\theta(D) \subset D$. **Indication** : on pourra géneraliser le resultat de question 1.
4. **Théorème de Howie.** Soit α une application non bijective de X dans X. Montrer qu'il existe un nombre fini d'applications $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ de X dans X telles que, pour tout i, $\pi_i = \pi_i \circ \pi_i$ et $\alpha = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \ldots \circ \pi_n$

Problème V

1. Soit $A \subset \mathbb{N}^*$. On dit que A admet une *densité* si la suite $\left(\frac{Card(A \cap [1,\ldots,n])}{n}\right)_n$ est convergente, et on appelle sa limite la densité de A. Soit α irrationnel et plus grand que 1. Montrer que l'ensemble $\{\lfloor n\alpha \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ admet une densité α^{-1}.
2. **Théorème de Beatty.** Soit α,$\beta > 1$, $E = \{\lfloor n\alpha \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $F = \{\lfloor n\beta \rfloor,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
   (a) E et F forment une partition de $\mathbb{N}^*$;
   (b) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ et α et β sont irrationnels.

Part II
English

Problem I

Let ABC be a triangle and let P be a point on BC. Points M and N lie on AB and AC respectively and are such that MN is not parallel to BC and $AMPN$ is a parallelogram. Line MN meets the circumcircle of ABC at R and S. Prove that the circumcircle of triangle RPS is tangent to BC.

Problem II

Find the greatest integer $n \geq 3$ that verifies : for every integer k such that $2 \leq k \leq n$, if k and n are co-prime, then k is a prime number.

Problem III

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be pairwise distinct integers and $P(X)$ the following polynomial :

$$P(X) = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_n) - 1$$

Prove that $P(X)$ is irreducible over $\mathbb{Z}[X]$.

Problem IV

This section aims to prove Howie's theorem concerning applications between a finite set and itself. For the entire problem X will be a finite non-empty set.

Definitions : A function is called surjective if each point of the target set is the image of at least one point of the domain and injective if it has different values in each two different points. In other words, it is injective if each point of the target set is the image of at most one point of the domain. A function is bijective if it is both injective and surjective.

1. Let σ be a permutation of X, that is a bijection from X to itself. We say that a permutation σ' is a cycle if there are $n \in \mathbb{N}$ and $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in X^n$ for which $\sigma'(a_i) = a_{i+1}$ for every $i \leq n-1$, $\sigma'(a_n) = a_1$ and all other points are fixed. We call its support the set of $a \in X$ for which $\sigma'(a) \neq a$, or in other words the set containing the a_i's. Prove that σ can be written as a product of cycles with disjoint supports (that is, with pairwise empty intersections).
2. Let $D \subset X$ and let $\theta : D \to X$ be a function that is injective but not surjective. We assume $\theta(D) \subset D$. Show that there exists a finite number of applications $p_1, p_2, \ldots, p_n$ from X to X which verify $p_i = p_i \circ p_i$ for every i and such that the restriction to D of their product $p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$ is equal to θ.

3. Show that the result of the previous question remains true without the hypothesis $\theta(D) \subset D$. **Indication** : a generalisation of question 1 may be helpful.
4. **Howie's theorem.** Let α be a non-bijective function from X to X. Prove that there exists a finite number of functions $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ from X to X verifying $\pi_i = \pi_i \circ \pi_i$ for every i and such that $\alpha = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \ldots \circ \pi_n$.

Problem V

1. Let $A \subset \mathbb{N}$. We will say that A has a *density* if the sequence $\left(\frac{Card(A \cap \{1,\ldots,n\})}{n}\right)_n$ converges, and its limit is A's density. Let α be an irrational number that is greater than 1. Show that the set $\{\lfloor na \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$ has a density of α^{-1}.
2. **Beatty's theorem.** Let α,$\beta > 1$, $E = \{\lfloor n\alpha \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$ and $F = \{\lfloor n\beta \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$. Prove that the following properties are equivalent :
   (a) E and F form a partition of $\mathbb{N}$;
   (b) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ and both α and β are irrational.