Concours Général de Mathétmatiques "Minko Balkanski"

SOLUTIONS

3 Juin 2018

Solution 1.

$\boxed{(x,y) \in \{(0,0),(8,6),(-8,-6)\}.}$ L'équation se réécrit comme

$$x(x^2-37) = y^3\,.$$

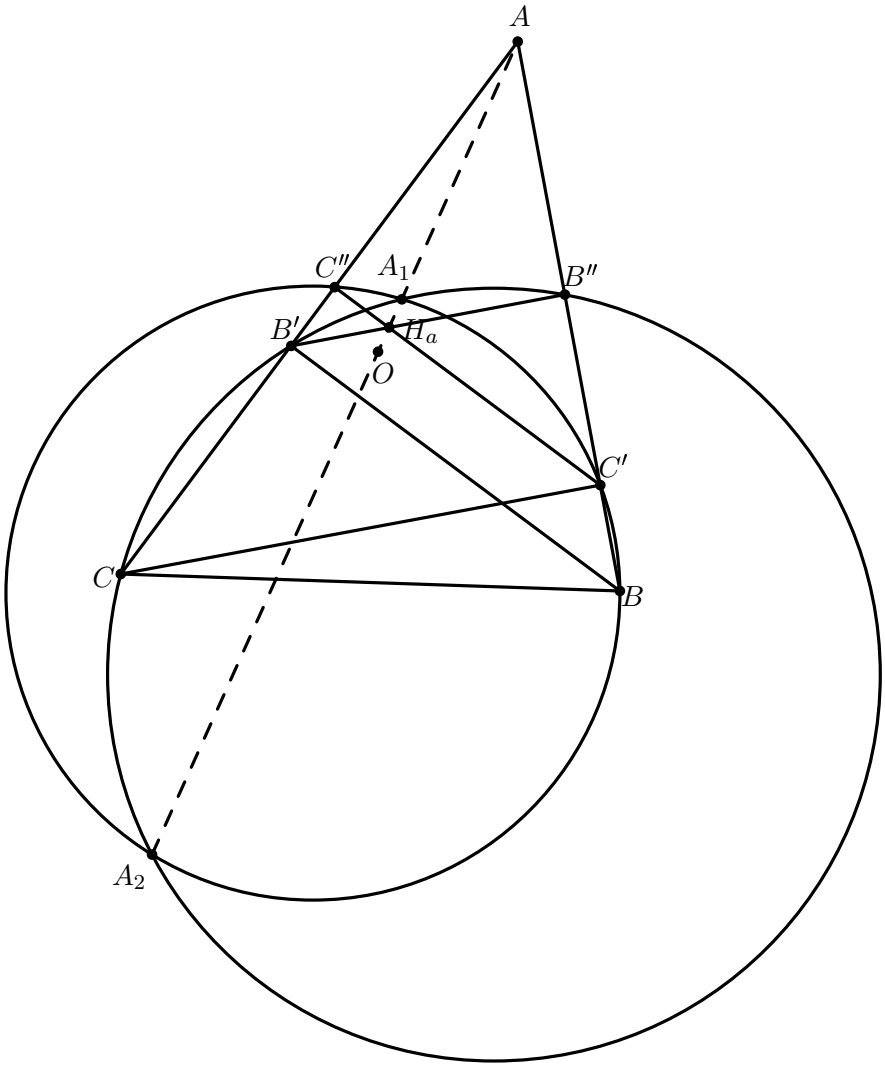
Notons que x et x^2-37 sont soit premiers entre eux, donc tous deux des cubes, soit ont seulement le diviseur 37 en commun. Dans le deuxième cas on voit qu'en fait x est divisible par 37^2, donc on pose $x = 37^2u$, $y = 37v$ pour obtenir $u(37^3u^2-1) = v^3$. Puisque les deux facteurs sont premiers entre eux, ils doivent être des cubes. Alors comme 37^3u^2 et 37^3u^2-1 sont tous deux des cubes, ils sont nécessairement égaux à 0 et ± 1, ce qui donne $u = 0$ et donc $x = y = 0$.

Dans le premier cas on a que x et x^2-37 sont des cubes, donc x^2-37 et x^2 sont des cubes, ce qui est possible uniquement pour $x = \pm 8$ et donc $y = \pm 6$ respectivement.

$\star$

Solution 2.

On a par le théorème des axes radicaux pour les cercles circonscrits de $\triangle BC'C''$, $\triangle CB'B''$ et $BCB'C'$ (qui est inscrit, car $\angle BB'C = \angle BC'C = 90°$) que A_1A_2 passe par $BC' \cap CB' = A$. De plus, l'orthocentre H_a du triangle $B'C'A$ a des degrés egaux par rapport au cercles circonscrits de $\triangle BC'C''$ et $\triangle CB'B''$, car $B'C''B''C'$ est inscrit dans un cercle et donc $H_aB'.H_aB'' = H_aC'.H_aC''$. On en déduit que H_a est aussi sur l'axe radical des deux cercles circonscrits de $\triangle BC'C''$ et $\triangle CB'B''$, d'ou cet axe est exactement la droite AH_a. Par un calcul d'angles on pourra façilement se convaincre que cette droite passe par le centre du cercle circonscrit de $\triangle ABC$, qui est donc, par un raisonnement analogue pour les sommets B et C, le point commun cherché de A_1A_2, B_1B_2 et C_1C_2.



⋆

Solution 3.

$\boxed{2^n - 1.}$ La finitude découlera de la borne que nous montrerons, mais elle peut être démontrée indépendamment aussi de manière bien plus directe (par récurrence, puis par l'absurde et en considérant un intervalle long entre deux jetons). Notons d'abord que la procédure est réversible, donc de toute configuration on peut revenir au point de départ simplement en revenant sur nos pas. Soit $l(n)$ le plus grand entier (possiblement infini) sur lequel on peut poser un jeton.

Montrons par récurrence que $l(n) \leqslant 2^n - 1$. L'initialisation est triviale. Soit $X \subset \mathbb{N}\backslash\{0\}$ une configuration à laquelle on peut arriver avec n jetons (on les place tous sans nuire à la généralité). Notons $X = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ avec $x_1^0 < \ldots < x_n^0$, $X_0 = X \cup \{0\}$ et soit aussi $x_0^0 = 0$. Par réversibilité il existe i tel que $x_{i+1}^0 - x_i^0 = 1$ (sinon aucun mouvement n'est possible). Donc $X_1 = X\backslash\{x_{i+1}\}$ est aussi atteignable et on note $X_1 = \{0, x_1^1, \ldots, x_{n-1}^1\}$ toujours dans l'ordre (on étendra la notation aux X_k qui suivent). Plus généralement, si on dispose de k jetons dans la poche et on a placé les $n - k$ restants sur $X_k\backslash\{0\}$, par

réversibilité il doit être possible de retirer un des jetons en premier – celui sur x_{i+1}^k. Mais alors sans bouger les autres qui sont sur la table, il doit être possible de l'atteindre avec les k jetons de la poche. Par définition cela n'est possible que si $x_{i+1}^k - x_i^k \leqslant l(k)+1$. Alors on pose $X_{k+1} = X_k \backslash \{x_{i+1}^k\}$. On continue ainsi jusqu'à $X_n = \{0\}$. Remarquons maintenant que

$$\sum_j \left(x_{j+1}^k - x_j^k\right) \leqslant \sum_j \left(x_{j+1}^{k+1} - x_j^{k+1}\right) + l(k) + 1\,,$$

d'où

$$\max X = x_n = \sum (x_{j+1}^0 - x_j^0) \leqslant \sum (l(k)+1) = \sum 2^k = 2^n - 1\,.$$

Ainsi on a bien $l(n) \leqslant 2^n - 1$. Il est facile de suivre les égalités dans cette preuve pour voir que le cas d'égalité est effectivement atteint (seulement) pour $X = \{2^{n-1}, 2^{n-1} + 2^{n-2}, \ldots, 2^n - 1\}$ et la stratégie lue à l'envers donne une stratégie (recursive) pour y arriver. Plus concètement, on utilise $n-1$ jetons pour placer le n-ème en 2^{n-1} (c'est possible par hypothèse de récurrence) et on les enlève comme on les a placés. Ensuite on utilise $n-2$ en commençant en 2^{n-1} pour mettre le dernier en $2^{n-1} + 2^{n-2}$, on enlève les $n-2$ et ainsi de suite. Par conséquent, on a bien $l(n) = 2^n - 1$.

Remark. Mentionnons que ce problème est dû à Chung-Diaconis-Graham, 2001.

⋆

Solution 4.

Pour deux intervalles fermés I et J de $[0,1]$ on écrit $I \longrightarrow J$ si $f(I) \supset J$ et on dit que $f(I)$ couvre J. On sait que f agit sur l'ensemlbe $\{x_3, f(x_3), f(f(x_3))\}$ comme un cycle de longueur 3. Quitte à remplcer x_3 par $f(x_3)$ ou $f(f(x_3))$ on peut supposer que soit $x_3 < f(x_3) < f(f(x_3))$, soit $x_3 > f(x_3) > f(f(x_3))$. On supposera que la première chaîne d'inégalités est vraie sans nuire à la généralité, car on peut remplacer f par $\tilde{f}$ définie par $\tilde{f}(x) = 1 - f(1-x)$ (on a toujours que $1 - x_3$ est de période exactement 3). Sous cette hypothèse, en posant $I_1 := [x_3, f(x_3)]$ et $I_2 := [f(x_3), f(f(x_3))]$, on obtient $I_1 \longrightarrow I_2$ et $I_2 \longrightarrow I_1 \cup I_2$. Nous aurons besoin du Lemme suivant.

Lemma. *Soient I et J deux intervalles fermés tels que $I \longrightarrow J$. Alors il existe un intervalle fermé $I' \subseteq I$ avec $f(I') = J$.*

Démonstration. Soit $J = [a,b]$ et $x_0, y_0 \in I$ tels que $f(x_0) = a$ et $f(y_0) = b$. Pour simplifier nous supposons que $x_0 < y_0$, le cas complémentaire étant analogue. Posons $x = \max\{x' \in I,\, y_0 \geqslant x' \geqslant x_0,\, f(x') = a\}$ et $y = \min\{y' \in I,\, y_0 \geqslant y' \geqslant x,\, f(y') = y\}$, qui existent bien par continuité. Nous montrerons alors que $I' = [x,y]$ vérifie $f(I') = J$. En effet, $f(I') \supset J$ par le théorème des valeurs intermédiaires. De plus, s'il existe $y > x' > x$ avec $f(x') < a$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $y_0 > y > x'' > x'$ tel que $f(x'') = a$, ce qui contredit la définition de x. On montre de manière analogue qu'il n'existe pas $x < y' < y$ avec $f(y') > b$, ce qui termine la preuve du Lemme. □

Nous terminerons alors la solution à l'aide de ce Lemme. Rappelons que $I_1 \longrightarrow I_2$, $I_2 \longrightarrow I_2$ et $I_2 \longrightarrow I_1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on a que $f(x) - x$ atteint la valeur 0, donc f admet un point fixe. Fixons $n \geqslant 2$. On a $I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$, où il y a n couvertures. Ainsi par récurrence immédiate utilisant le Lemme on voit qu'il existe une suite $(J_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ d'intervalles fermés tels que $J_0 = I_1$, $J_n \subseteq I_1$, $f(J_n) = J_{n-1}$ pour tout $k < n$ on ait $J_k \subseteq I_2$ et $f(J_k) = J_{k-1}$. Cela implique $f^{\circ n}(J_n) = J_0 = I_1 \supseteq J_n$ et donc $f^{\circ n}$ admet un point fixe dans l'intervalle J_n (nous avons

déjà montré qu'une fonction continue d'un intervalle fermé dans lui-même a un point fixe). De plus, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, f^{\circ k}(J_n) \subseteq I_2$ qui est disjoint de I_1, donc le point fixe de $f^{\circ n}$ est un point périodique de période exacte n pour f, ce qui termine la preuve.

Remark. Le résultat est un cas particulier d'un théorème de Charkovski.

$\star$