# Concours Général de Mathétmatiques "Minko Balkanski"

## Solutions

18 mai 2019

**Solution 1.**

**a.** Soit $n = 101$. On commence par donner une borne inférieure du temps d'évacuation et on donne un algorithm, qui l'atteint. Considérons l'étage numéro $i$. Le nombre de gens, qui attendent l'ascenseur à un étage supérieur est initialement

$$\sum_{s=i+1}^{101} s = \frac{101.102}{2} - \frac{i.(i+1)}{2} = \frac{(101-i)(102+i)}{2}. \tag{1}$$

Ainsi, le nombre de fois que l'ascenseur doit monter plus haut que l'étage $i$ pour prendre ces personnes est

$$\left\lceil \frac{(101-i)(102+i)}{10} \right\rceil. \tag{2}$$

Pour obtenir une borne inférieure du temps que l'ascenseur met à monter ou descendre entre étages, on somme (2) de $i = 0$ à $i = 100$ et multiplie par quatre secondes (deux pour la montée et deux pour la descente). Pour borner le temps passé aux étages, notons que l'ascenseur attend au moins $8\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$ secondes à l'étage $i$.

Donnons un exemple saturant les deux bornes et donc ayant temps d'évacuation total

$$4\sum_{i=0}^{100} \left\lceil \frac{(101-i)(102+i)}{10} \right\rceil + 8\sum_{i=1}^{101} \left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil = 287572$$

secondes, soit 79 heures, 52 minutes et 52 secondes. Pour ce faire, on exécute la procédure suivante.

- On fait descendre 5 personnes de chaque étage tant que c'est possible (dans un ordre arbitraire). A ce moment à l'étage $i$ il reste un nombre de personnes égal au reste de $i$ modulo 5.
- On fait descendre les gens restant 5 par 5, en appariant les étages non-vides successives – $5k+6$ avec $5k+4$, $5k+3$ avec $5k+2$ pour $0 \leqslant k \leqslant 19$.
- On fait descendre l'unique personne du première étage.

L'ascenseur s'arrête bien le nombre minimal de fois, $\left\lceil \frac{i}{5} \right\rceil$, à l'étage $i$ pour prendre les gens à cet étage. Pour traiter le temps de montée et descente, on montre que pour chaque étage $i \leqslant 100$ la distance entre étages $i$ et $i+1$ est parcourue le nombre minimal de fois. Notons que pour chaque tel lien entre étages le nombre de montées et descentes est égal, comme l'ascenseur termine à l'étage 0. De plus, chaque lien est parcouru exactement le nombre de fois dans (2) (on le vérifie séparement pour les étages de numéro avec un reste different modulo 5).

**b.** Pour $n = 100$ on répète un algorithme similaire dont l'exactitude est montrée par la même méthode (la vérification pour le temps de montée/descente diffère légèrement). L'algorithme modifié est comme suit.

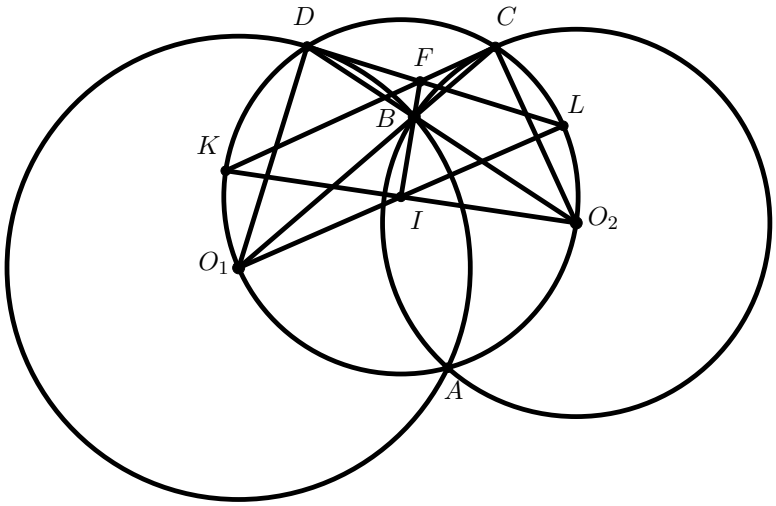
- On fait descendre 5 personnes de chaque étage tant que c'est possible (dans un ordre arbitraire). A ce moment à l'étage $i$ il reste un nombre de personnes égal au reste de $i$ modulo 5.

— On fait descendre les gens restant 5 par 5, en appariant les étages non-vides successives – $5k+4$ avec $5k+1$, $5k+3$ avec $5k+2$ pour $0 \leqslant k \leqslant 19$.

Le temps d'exécution est 2 heures, 20 minutes et 12 secondes de moins.

⋆

**Solution 2.**




Notons d'abord que $\angle O_1CO_2 = \angle O_1DO_2 = 180° - \angle O_1BO_2 = 180° - \angle O_1AO_2$. On en déduit que $O_1$, $O_2$, $A$, $C$ et $D$ sont cocycliques. Soit $L$ le point d'intersection de ce cercle avec la droite $DF$, distinct de $D$, et soit $K$ le point d'intersection du même cercle avec la droite $CF$, distinct de $C$. On a que $O_1L$ et $O_2K$ sont des diametres dans $k$ et donc s'intersectent au point $I$. On conclut par le théorème de Pascal pour le cercle $k$ et les triplets de points $D, K, O_1$ et $C, L, O_2$.

⋆

**Solution 3.**

**a.** Notons d'abord que les fonctions constantes sont des solutions. Supposons que la fonction est non-constante. En injectant $n = 1$ dans la relation, on obtient

$$\forall m, k \in \mathbb{N}, f(m+1) | f(m) + f(1)^{f(k)}.$$

Considérons deux cas.

**Cas 1.** Supposons que $f(1) > 1$. Alors ce qui précède donne

$$\forall m, k, s \in \mathbb{N}, f(m+1) \mid f(1)^{f(s)} - f(1)^{f(k)}.$$

Puisque $f$ n'est pas constante, il s'ensuit que pour $s, k$ tels que $f(s) \neq f(k)$, on a $f(m+1) \mid f(1)^{f(s)} - f(1)^{f(k)}$ et, en particulier, $f$ est bornée. Alors pour $N$ assez grand, $f(m+N^k) = f(N) = \max f$. Mais la condition de divisibilité pour $n = N$ et $m, k$ arbitraires donne dans ce cas $\max(f) \mid f(m)$. Par conséquent, $f$ doit être une fonction constante, ce qui a été déjà traité.

**Cas 2.** Supposons que $f(1) = 1$. Soit $a = \min\{n \in \mathbb{N} | f(n) > 1\}$. La condition de divisibilité pour $m = k = 1$ et $n = a - 1$ donne $f(a) = 2$. Alors $f(a+1) \mid f(a) + f(1) = 3$ et si $a \geqslant 3$,

on a aussi $f(a+1) \mid f(2)+f(a-1)=2$. Cela impose $f(a+1)=1$ – contradiction avec l'hypothèse que $f$ est non-décroissante. Ainsi $a=2$ et $f(2)=2$. Une récurrence immédiate suffit pour conclure que dans ce cas on obtient $\boxed{\text{la fonction identité}}$, qui est bien solution du problème.

**b.** En injectant $k=1$ dans la condition de divisibilité on, obtient

$$f(m+n) \mid f(m)+f(n). \tag{3}$$

Par récurrence cela donne $f(n) \leqslant n$ pour tout $n$. On considère de nouveau deux cas.

**Cas 1.** Supposons que $f(2)=1$. Soit $a=\min\{n \in \mathbb{N} | f(n)>1\} > 2$ comme ci-dessus. Comme dans **a.** on obtient $f(a)=2$. Alors comme dans **a.**, par récurrence $f(n)=1$ pour tout $n$ non-divisible par $a$ et $f(n) \mid 2$ pour tout $n$ divisible par $a$. En effet, par (3) on a $f(n) \mid f(a)+f(n-a)$ et $f(n) \mid f(\alpha)+f(n-\alpha)$ pour $\alpha < a$ avec $a \nmid n-\alpha$ et les deux sommes peuvent être calculées à l'aide de l'hypothèse de récurrence.

Notons que $f(la)=1$ pour un certain $l$, alors $f(n)=1$ pour tout $n \geqslant la$, puisque $f(ma) \mid f(a)+f((m-1)a)=3$ par récurrence et on sait que $f(ma) \mid 2$. Ainsi $f$ est équivalente à $\boxed{\text{la fonction constante 1}}$ et on a fini. La seule autre possibilité est d'avoir $f(n)=2$ si $a \mid n$ et 1 sinon. On va monter que c'est une solution uniquement si $a=\prod p_i$ pour des nombres premiers distincts $p_i$. Pour voir que $a$ de cette forme donne bien une solution, notons que $a \mid m+n^k$ implique que pour tout $i$ on a que $m$ et $n$ sont soit tous deux divisibles par $p_i$, soit tous deux non-divisibles. Alors $f(m+n^k)=2$ implique $f(m)=f(n)$ et la condition de divisibilité souhaitée est établie. Ainsi,

$$\boxed{f(n)=2 \text{ si } a \mid n \text{ et 1 sinon avec } a=\textstyle\prod p_i \text{ pour } p_i \text{ premiers distincts}}$$

est bien une solution. Supposons que $p^2 \mid a$ pour un nombre premier $p$. Alors $2=f(a+(a/p)^2)=f(a)+f(a/p)^{f(2)}=3$ – contradiction.

**Cas 2.** Supposons que $f(2)=2$. Soit $n_k=\min\{n>n_{k-1} | f(n_k)=1\}$ avec $n_1=1$.

Notons que si pour un certain $k$ on a $n_k-n_{k-1}=1$, alors $f(n)=1$ pour tout $n \geqslant n_{k-1}$, ce qui est équivalent à la constante 1. Supposons que $n_k-n_{k-1} \geqslant 2$ pour tout $k$. Si $n_k-n_{k-1}=2$ pour un $k$, alors $f(n_k-2)=1=f(n_k)$, $f(n_k-1)=2=f(n_k+1)$ et $f(n_k+2)=f((n_k-2)+2^2)=f((n_k+1)+1)$ divise 5 et 3, de sorte que $n_{k+1}-n_k=2$. Par récurrence la suite alterne entre 1 et 2. Dans **Cas 1.** on a vu que la fonction égale à 2 sur les entiers pairs et 1 sur les impairs est une solution. La parité opposée n'est pas admissible pour tout $n$ assez grand. En effet, (3) est contredit pour $m=n+1$ asseez grand.

Ainsi on peut supposer $n_k-n_{k-1} \geqslant 3$ pour tout $k$ et chercher une contradiction. Soit

$$m_k=\min\{m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} | m>n_k, f(m)<m-n_k+1\}$$

et notons que $f(m)<m-n_k+1$ pour tout $m \geqslant m_k$ et $f(m)=m-n_k+1$ pour tout $n_k \leqslant m < m_k$ par (3). Posons aussi $b_k=m_k-n_k \geqslant 3$ (puisque $n_{k+1}-n_k \geqslant 3$). Supposons de plus que $f$ n'est pas l'identité, de sorte que $m_1$ soit fini.

Montrons par récurrence que $b_{k+1}<b_k$ (et $n_{k+1}$ et $m_{k+1}$ sont finis). Supposons que cela vaut pour tout $k<k_0$. Par le postulate de Bertrand [1] il existe un nombre premier $b_{k_0}<p<2b_{k_0}$, où $b_{k_0}=m_{k_0}-n_{k_0}$. Mais par (3) et les définitions de $m_{k_0}$ et $b_{k_0}$ on a

$$f(p+n_{k_0}-1) \mid f(m_{k_0}-1)+f(p-b_{k_0})=b_{k_0}+(p-b_{k_0})=p,$$

car $p-b_{k_0}<b_{k_0} \leqslant b_1<m_1$. Puisque $f(m)<m-n_{k_0}+1$ pour $m \geqslant m_{k_0}$, on a $f(p+n_{k_0}-1)=1$ et donc $n_{k_0+1} \leqslant p$. Supposons pour une contradiction que $m_{k_0+1}>n_{k_0+1}+b_{k_0}$. Fixons

1. D'autres faits sur la distribution des nombres premiers peuvent être évoqués, mais on se contente de celui-ci, comme il est parmi les plus connus.

$m \leqslant b_{k_0}$ et soient $n_{k_0} \leqslant \alpha < m_{k_0}$ et $\beta \leqslant b_1$ tels que $n_k + m = \alpha + \beta^2$. Cela est possible, car $b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}} \leqslant 2b_{k_0}$, donc $2\left\lceil\sqrt{b_{k_0} + n_{k_0+1} - m_{b_{k_0}}}\right\rceil \leqslant b_{k_0}$. Alors

$$m + 1 = f(n_{k_0+1} + m) | f(\alpha) + f(\beta)^2 = n_{k_0+1} - n_{k_0} + m + 1,$$

donc $n_{k_0+1} - n_{k_0} < 2b_{k_0}$ est divisible par tous les entiers inférieures à $b_{k_0}$. Cela n'est pas possible pour $b_{k_0} \geqslant 3$ (par exemple par le postulate de Bertrand). Ainsi, $b_k$ forment une suite décroissante, ce qui contredit $b_k \geqslant 3$. Il n'y a donc pas d'autres solutions.

$\star$