Concours Général de Mathématiques "Minko Balkanski"

Solutions

14 août 2021

Solution 1.

Soit $\varepsilon \in (0, 1/8)$. Alors il existe N_ε tel que pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$ on a

$$a_{n+1} > a_n + a_n^2 - \varepsilon.$$

Notons que si $N \geqslant N_\varepsilon$ et $|a_N| \geqslant \sqrt{2\varepsilon}$, alors $a_{N+1} > a_N + a_N^2 - \varepsilon \geqslant a_N + \varepsilon$. Supposons qu'un tel N existe pour un certain $\varepsilon \in (0, 1/8)$. Par récurrence cela donne $a_{N+k} \geqslant a_N + k\varepsilon$, tant que $|a_{N+m}| > \sqrt{2\varepsilon}$ pour tout $m \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Si $a_N > \sqrt{2\varepsilon}$, on a $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Ainsi, il reste à traiter le cas où $a_n \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$ pour tout $n \geqslant N_\varepsilon$. Alors nécessairement il existe $k > N_\varepsilon$ tel que $|a_k| \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$. Mais alors par récurrence pour tout $m > k$ il en découle que $a_m \geqslant -\sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon$. En effet, si $a_m \geqslant -\sqrt{2\varepsilon}$, alors

$$a_{m+1} \geqslant \min_{x\in[-\sqrt{2\varepsilon},\sqrt{2\varepsilon}]} x + x^2 - \varepsilon = -\sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon,$$

puisque $\varepsilon < 1/8$.

Pour résumer, nous avons montré que pour chaque $\varepsilon \in (0, 1/8)$ l'une des assertions suivantes est vraie :

— $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$;

— pour tout m suffisamment grand $-\sqrt{2\varepsilon} + \varepsilon \leqslant a_m \leqslant \sqrt{2\varepsilon}$.

Clairement, il s'ensuit que, si la première possibilité n'arrive pas, alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

⋆

Solution 2.

Commençons par quelques observations générales. D'abord, chaque vélo ne peut parcourir la distance de A à B qu'une seule fois (aller dans le sens opposé étant compté avec un signe négatif). Alors, s'il y a n personnes et k vélos, la distance totale parcourue est $n|AB|$, dont au plus $k|AB|$ à vélo. Ainsi, le temps total mis par le groupe est au moins

$$\left(\frac{k}{20} + \frac{n-k}{5}\right)|AB|,$$

d'où, étant donné que nous cherchons le temps nécessaire à la dernière personne pour arriver en B, une borne inférieure est

$$\left(\frac{k}{20} + \frac{n-k}{5}\right)\frac{|AB|}{n}. \tag{1}$$

De plus, pour qu'elle soit atteinte, tous les amis doivent arriver en B simultanément, rouler $|AB|k/(20n)$ heures, marcher le reste du temps et ne jamais revenir en arrière.

a. $\boxed{15 \text{ minutes.}}$ La borne inférieure vient de l'argument général ci-dessus. Construisons un exemple. Il suffit que Marius roule en vélo pour la première moitié de la distance et marche le reste. Ivo marche la première moitié, reprend le vélo et roule jusqu'au point final. Tous les deux mettent $1/20 + 1/5 = 1/4$ heures, soit 15 minutes.

b. $\boxed{\left(\frac{k}{20} + \frac{n-k}{5}\right)\frac{|AB|}{n} \text{ heures.}}$ La borne inférieure a été déjà établie, donc on se concentre sur l'exemple. Etiquetons les gens de 1 à n et partitionnons la distance de A à B en n morceaux de longueur égale, dont les extrémités seront appelées pivots, de sorte que B est le pivot n. La première personne va en vélo jusqu'au pivot k et marche jusqu'à B. Personne 2 prend le vélo jusqu'àu pivot $k-1$, marche jusqu'au pivot $n-1$, prend un vélo laissé là et termine la course avec. La troisième personne roule au pivot $k-2$, marche à $n-2$, depuis là elle utilise le vélo qu'elle y trouve jusqu'à la fin. On continue ainsi, en tournant la configuration de manière cyclique. La dernière personne marche jusqu'au pivot 1, puis roule à $k+1$ et marche jusqu'à n.

Vérifions à présent que ceci est effectivement légitime. Plus précisement, montrons qu'il y a bien un vélo disponible pour chaque personne au moment et endroit nécessaire, puisqu'il est clair que, si tel est le cas, chaque personne met exactement le temps donné par (1) pour arriver au but. En effet, chaque personne a besoin de trouver un vélo exactement une fois sauf la première personne, qui n'en a jamais besoin. De plus, ceci arrive à un pivot différent pour chacun. Or, chaque personne laisse son premier vélo à un pivot différent (avec la convention que la personne $n-k+1$ laisse son vélo en n), donc il reste à vérifier que la personne qui doit prendre le vélo arrive bien au pivot après celle qui le laisse. Mais ceci est vrai, puisque la personne qui reprend le vélo soit roule jusqu'à la fin, soit a marché jusqu'au pivot en question, ce qui montre que c'est la dernière personne du groupe.

Il existe bien d'autres manières d'atteindre le temps optimal.

$\star$

Solution 3.

Il n'y a aucune solution de cette équation. Supposons sans perte de généralité que $a \geqslant b$ et $p \geqslant q$ et soient $X = \frac{a!+b!}{(p-1)!+(q-1)!}$ et $Y = \frac{3(n^2+1)}{2}$. Notons que Y est soit un multiple impair de 3 (pour n impair), soit un multiple impair de 3 divisé par 2 (pour n pair, on appèle ça un multiple de 3 impair aussi).

Supposons que $b \geqslant q+1$**.** Dans ce cas le numérateur de X est congru à 0 modulo $4(q-1)!$, mais son dénominateur est congru à $(q-1)!$ ou $2(q-1)!$, donc X ne peut pas être impair – contradiction.

Supposons que $b = q$**.** Alors q divise $3(n^2+1)$ et donc $b = q = 3$ car n^2+1 n'a pas de diviseurs premiers de la forme $4k+3$. Cela contredit $12|q-7$.

Supposons que $b = q-1$**.** Pour que le numérateur de X soit divisible par 3 on doit avoir $a = q$ ou $a = q+1$. Dans les deux cas on a nécéssairement $p = q$, car sinon $p \geqslant q+12$ et $X < 1$. On arrive à $\frac{a!}{(p-1)!} = 3n^2+2$, ce qui amène à une contradition modulo 4 (on considère le cas $a = p-1$ séparément).

Supposons que $b \leqslant q-2$**.** Clairement $a \geqslant q-1$, car sinon $X \leqslant 1$ et $Y \geqslant 3/2$. Alors $(q-1)!$ divise le dénominateur de X tandis que le numérateur est congru à $b!$ modulo $(q-1)!$, d'où $\frac{(q-1)!}{b!}|2$. On conclut que $q = 3 > b$ et comme 3 divise $a!+b!$, on montre façilement qu'il n'y a pas de solution dans ce cas non plus.

$\star$