Concours Général de Mathématiques «Minko Balkanski»

Solutions

27 août 2022

Solution 1.

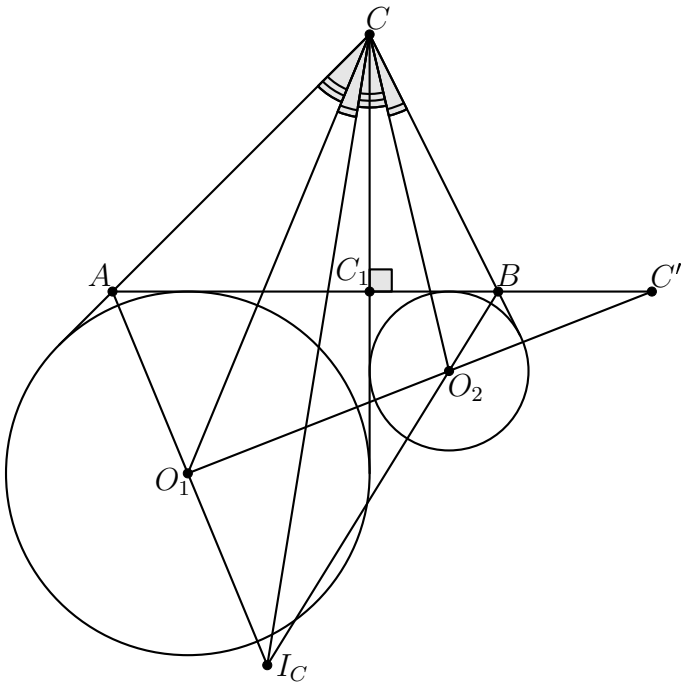
Quitte à multiplier f, g et h par -1, on peut supposer que le coefficient dominant de $P(x) = 3f(x) - 7g(x) - 2h(x)$ est positif. Posons également $Q(x) = f(x) + g(x) - 4h(x)$ et $R(x) = f(x) + g(x) + h(x)$. On résout le système linéaire pour obtenir

$$\begin{aligned} 10f(x) &= P(x) + Q(x) + 6R(x), \\ 10g(x) &= -P(x) + Q(x) + 2R(x), \\ 10h(x) &= - 2Q(x) + 2R(x). \end{aligned}$$

Des deux premières relations on tire que les coefficients dominants de $Q(x)$ et de $R(x)$ ne peuvent pas être du même signe. Alors la troisième relation donne bien que $h(x)$ est soit toujours positif ou null, soit toujours négatif ou null.

Puisque $h(0) = 0$, nécessairement 0 est l'unique racine de $Q(x)$ et $R(x)$ aussi, d'où $f(0) + g(0) = 2Q(0) + 8R(0) = 0$.

⋆



Solution 2.

Notons par O_1 et O_2 les centres de c_1 et c_2 respectivement, et par I_C le centre du cercle exinscrit du triangle ABC, opposé au sommet C. Par le théorème de Ménélaüs pour le triangle ABI_C et la droite, passante pas O_1, O_2 et C',

$$\frac{|AC'|}{|BC'|} = \frac{|AO_1| \cdot |I_CO_2|}{|O_1I_C| \cdot |O_2B|}.$$

Puis, par la loi des sinus, intérée 4 fois pour les triangles AO_1C, O_1I_CC, I_CO_2C et O_2BC respectivement,

$$\begin{aligned}
\frac{|AO_1| \cdot |I_CO_2|}{|O_1I_C| \cdot |O_2B|} &= \frac{|AO_1|}{|O_1C|}\frac{|O_1C|}{|O_1I_C|}\frac{|I_CO_2|}{|O_2C|}\frac{|O_2C|}{|O_2B|} \\
&= \frac{\sin\angle ACO_1}{\sin\angle O_1AC}\frac{\sin\angle CI_CO_1}{\sin\angle O_1CI_C}\frac{\sin\angle I_CCO_2}{\sin\angle O_2I_CC}\frac{\sin\angle CBO_2}{\sin\angle O_2CB} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)} \\
&= \frac{(\sin\beta)\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}{(\sin\alpha)\cdot\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right)^2} \\
&= \frac{(\sin\beta)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)}{(\sin\alpha)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)} \\
&= \frac{(\sin\beta)\cdot(1-\sin\alpha)}{(\sin\alpha)\cdot(1-\sin\beta)} = \frac{1-(\sin\alpha)^{-1}}{1-(\sin\beta)^{-1}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule $(\sin x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Une expression similaire pour $\frac{|BA'|}{|A'C|}$ et $\frac{|CB'|}{|B'A|}$ amène à

$$\frac{|AC'|}{|BC'|}\frac{|BA'|}{|A'C|}\frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{1-(\sin\alpha)^{-1}}{1-(\sin\beta)^{-1}}\frac{1-(\sin\beta)^{-1}}{1-(\sin\gamma)^{-1}}\frac{1-(\sin\gamma)^{-1}}{1-(\sin\alpha)^{-1}} = 1,$$

ce qui suffit pour conclure en utilisant le théorème de Ménélaüs à l'envers.

⋆

Solution 3.

Pour commencer, notons que pour deux graphes $G_1 \subseteq G_2$ on a $s(G_1) \leqslant s(G_2)$ (propriété qu'on appelle *monotonie*). Par conséquent, il suffit de montrer l'inégalité recherchée lorsque G est un graphe biparti dont les deux parties sont V_1 et V_2, $|V_1| = 2^{k_1}s_1 + 1$ et $|V_2| = 2^{k_2}s_2 + 1$ pour deux entiers $k_1, k_2 \geqslant 0$. En effet, si V_1 n'est pas de cette forme, i.e. $|V_1| \in [2^{k_1}s_1 + 2, 2^{k_1+1}s_1]$ pour un entier $k_1 \geqslant 0$, on efface n'importe quels $|V_1| - (2^{k_1}s_1 + 1)$ éléments de V_1 et de même pour V_2 ; on supprime également $V \backslash (V_1 \cup V_2)$.

Montrons par récurrence sur $N = \min\{k_1, k_2\}$ que $s(G) \geqslant N + 1$, ce qui implique l'inégalité souhaitée par monotonie. Pour $N = 0$, on a que $s(G) \geqslant 1$ car G contient au moins deux arêtes : en effet, au moins une arête v_1v_2 connecte V_1 et V_2, et aussi au moins une arête connecte $V_1\backslash\{v_1\}$ et $V_2\backslash\{v_2\}$. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $N = N_0 - 1$. Soit $\mathcal{F}$ une bonne famille d'ordonnements de V de taille $r = s(G)$. Fixons un $\sigma \in \mathcal{F}$ et posons

$$t = \min_{1 \leqslant j \leqslant |V|} \left\{ |\sigma^{-1}([1, j]) \cap V_1| = 2^{k_1-1}s_1 + 1 \text{ ou } |\sigma^{-1}([1, j]) \cap V_2| = 2^{k_2-1}s_2 + 1 \right\}.$$

Intuitivement, t est le premier moment quand $\sigma^{-1}([1, t])$ contient plus que la moitié de V_1 et moins de la moitié de V_2 ou l'inverse. Sans nuire à la généralité, soit $|\sigma^{-1}([1, t]) \cap V_1| = 2^{k_1-1}s_1 + 1$. Posons $\sigma^{-1}([1, t]) \cap V_1 = U_1$ et $V_2\backslash\sigma^{-1}([1, t]) = U_2$. Quitte à supprimer $|U_2| - (2^{k_2-1}s_2 + 1) \geqslant 2^{k_2}s_2 + 1 - 2^{k_2-1}s_2 - (2^{k_2-1}s_2 + 1) \geqslant 0$ éléments de U_2, on obtient U_1 et U_2 qui satisfont l'hypothèse de récurrence pour $N_0 - 1$. Ainsi

$$|\mathcal{F}\backslash\{\sigma\}| = r - 1 \geqslant s(G[U_1 \cup U_2]) \geqslant N_0 - 1,$$

puisque σ ne sépare aucun couple d'arêtes de $G([U_1 \cup U_2])$. Ceci termine la preuve.

⋆