Concours Général de Mathématiques «Minko Balkanski»

Solutions

1 août 2023

Solution 1.

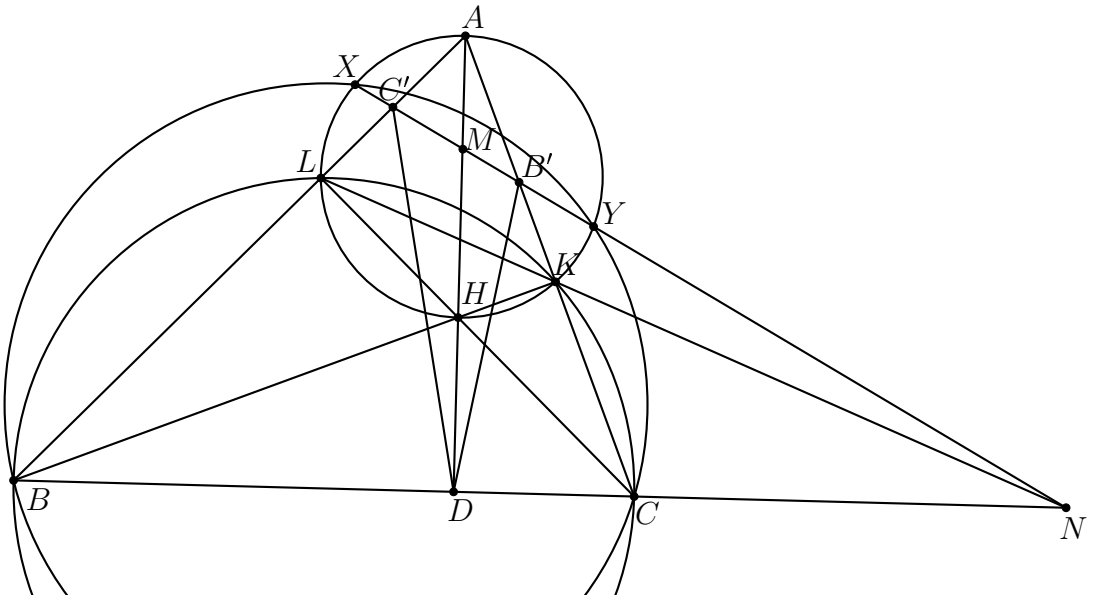
On peut réécrire l'inégalité sous la forme

$$a + b + c > ab + bc + ac.$$

Considérons le polynôme $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$. On sait que $P(0) = -1 < 0$ et $P(1) = ab + bc + ac - (a + b + c) < 0$. En particulier, aucun parmi a, b, c n'est égal à 1 et il y a un nombre pair parmi les trois nombres dans $(0, 1)$. Mais $abc = 1$ donne que ce nombre n'est pas 0 (sinon $a = b = c = 1$), d'où la conclusion. Pour la réciproque, il suffit d'observer que si P a deux racines dans $(0, 1)$, alors la troisième est plus grande que 1 et donc $P(1) < 0$.

⋆

Solution 2.



Soient K et L les pieds des hauteurs de B et C dans le triangle ABC, respectivement, et soit M le point d'intersection des droites AD et XY. Or, K et L appartiennent simultanément à k_1 et k_2. Or, par le théorème des axes radicales pour k_1, k_2 et le cercle circonscrit de $BCKL$, on sait que XY, KL et BC s'intersectent en un point.

En même temps, B, D, C et N forment un quadruplet harmonique, et en projetant depuis le point A on déduit que la même chose est vrai pour C', M, B' et N. De plus, $\angle MDN = 90°$, et donc DA est la bissectrice de l'angle $B'DC'$, ce qui termine la preuve.

⋆

Solution 3.

Seulement lorsque $n = 1$ ou $k \in \{1, 2\}$. Soit N le nombre total d'élèves en première. Notons les coquins par $1, \ldots, n$ et soit $L_i \subset \{1, \ldots, N\}$ la liste de l'élève i pour $i \in \{1, \ldots, N\}$.

Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Si $k = 1$, il suffit de choisir $L_i = \{i + 1\}$ pour $i < n$ et $L_n = \{1\}$.

Si $k = 2$, on choisit $L_1 = \{2, 3\}$, $L_2 = \{1, 3\}$, $L_i = \{1, 2\}$ pour $i \in [3, n]$. (Ici, on a utilisé $N > k = 2$ car il est autrement impossible pour les élèves de former leurs listes.)

Supposons que $k \geqslant 3$. De plus, soit $n < k + 1$. Alors $L_1 \backslash \{1, \ldots, N\}$ contien un $i \in \{n + 1, \ldots, N\}$. Mais il se peut que i liste 1, auquel cas le directeur peut former les classes $\{1, i\}$ et $\{2, \ldots, N\} \backslash \{i\}$. Ainsi, les élèves n'ont pas de stratégie gagnante.

Supposons que, au contraire, $n \geqslant k+1$ et considérons le graphe orienté G donné par les listes. On peut supposer que $L_i = \{1, \ldots, k\}$ pour tout $i > n$. Notons que si G a deux cycles (dirigés) disjoints par sommets, la directrice peut séparer les n coquins. En effet, ces cycles contiendraient nécessairement certains parmi les élèves $1, \ldots, n$ (puisque le degré entrant des autres sommets est 0), donc on peut mettre chaque cycle dans une classe différente et diviser les sommets restants en deux groupes : ceux qui sont connectés au premier cycle par un chemin dirigé et le reste.

Ainsi, il reste à montrer que tout graphe dirigé de degré sortant minimal au moins 3 contient deux cycles disjoints par sommets. Supposons le contraire et soit G un contre-exemple avec un nombre minimal d'arêtes. Notons que tout graphe de degré sortant au moins 1 a un cycle. De là, si G a un cycle uv de longueur 2, $G \setminus \{u, v\}$ contient un cycle, d'où une contradiction. Par conséquent, tous les cycles dans G ont longueur au moins 3.

Montrons que pour chaque sommet $x \in G$ il y a un cycle C dans le voisinage entrant de x. Pour ce faire, notons d'abord que si x a degré entrant 0, supprimer x contredit la minimalité de G. Or, pour chaque arête yx, on peut considérer le graphe G' obtenu en supprimant les arêtes sortants de y et en contractant l'arête yx. Notons que G' n'a pas deux cycles disjoints par sommets, d'où, par notre choix de G, il doit y avoir un degré sortant strictement inférieur à 3. Alors, il existe z tel que zy et zx sont tous les deux des arêtes. Mais de là, le graphe induit par le voisinage entrant de x a degré entrant au moins 1, donc il contient un cycle, comme annoncé.

De surcroît, en inversant les arêtes de G, on obtient un autre contre-exemple minimal. Alors, il y a aussi un cycle C' contenu dans le voisinage sortant de x dans G. Mais G n'a pas de cycles de longueur 2, donc C et C' sont disjoints par sommets, ce qui conclue la preuve.

$\star$