Concours Général de Mathématiques «Minko Balkanski»

Solutions

8 août 2024

Solution 1.

$\boxed{2024.}$ Exemple : $\prod_{i=1}^{2024}(x-i)$.

Supposons qu'on a au moins 2025 solutions $(x_i, y_i)_{i=1}^{2025}$ avec $x_1 < \cdots < x_{2025}$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, 1012\}$, on a $1012 < x_{2025} - x_i | y_{2025} - y_i$ et donc $y_i = y_{2025}$. De même, $y_1 = y_i$ pour $i \geqslant 1014$. Ainsi $P(x) = y_1 + a\prod_{i=1}^{1012}(x - x_i)\prod_{i=1014}^{2025}(x - x_i)$ pour un entier a. De là, on a que

$$1012 \geqslant y_{1013} = |P(x_{1013})| \geqslant |a|(1012!)^2 - 1012,$$

d'où $a = 0$. Contradiction.

⋆

Solution 2.

$\boxed{(5,1).}$ Supposons que (x, y) est une solution avec $x > 5$ et $y > 1$. On réécrit l'équation comme

$$2^5(2^{x-5} - 1) = 23(23^{y-1} - 1).$$

Puisque $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$ et 11 est premier, on a que l'ordre de 2 modulo 23 est 11. Ainsi 11 divise $x - 5$ et donc

$$89|2^{11} - 1|2^{x-5} - 1|23(23^{y-1} - 1).$$

En particulier, $89|23^{y-1} - 1$. Calculons le symbole de Legendre

$$\left(\frac{23}{89}\right) = \left(\frac{89}{23}\right) = \left(\frac{20}{23}\right) = \left(\frac{5}{23}\right) = \left(\frac{23}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1.$$

Ainsi $23^{44} \equiv -1 \pmod{89}$. Or le petit théorème de Fermat donne $89|23^{88} - 1$, donc 8 divise l'ordre de 23 modulo 89. On en déduit que $8|y - 1$ et donc $23^8 - 1|23^{y-1} - 1$. Mais on peut vérifier que $2^6|23^8 - 1$, ce qui implique $2^6|23^8 - 1|23^{y-1} - 1|2^5(2^{x-5} - 1)$, ce qui est une contradiction avec $x > 5$.

⋆

Solution 3.

$\boxed{\text{Non. Oui. Oui.}}$ On appelle densité d'une boîte B, le ratio $d(B) = |B \cap A|/|B|$.

(a) Soit $c = 1/4$. Prenons $A = \{(0, 0)\}$.

(b) Soit $c = 4/5$. On considère des boîtes dyadiques, en commençant avec une boîte qui contient A et de densité au plus 4/5. Si une boîte B se subdivise en $B_1, \ldots, B_4$, on a $\max_i d(B_i) \leqslant 4d(B)$. On prend les boites qui sont de densité dans $[1/5, 4/5[$ et on continue de subdiviser les autres.

(c) Soit $c = 2/3$. Une boîte B est mauvaise, si $d(B) \geqslant c$. Considérons une subdivision d'une boîte B de taille 2^{n+2} avec $d(B) < 1/5$ en 16 boîtes $(B_{i,j})_{i,j=1}^4$ de taille 2^n. Si aucune n'est mauvaise, on ajoute celles qui sont de densité au moins 1/5 à notre collection et on continue de subdiviser les autres. Si cinq ou plus sont mauvaises, on obtient $d(B) \geqslant 5c/16 > 1/5$ – contradiction.

Supposons qu'entre une et quatre boîtes $B_{i,j}$ sont mauvaises. Si elles sont toutes dans une boîte de taille 2^{n+1}, on ajoute à notre collection une boîte B' de taille $3 \cdot 2^n$ qui la contient et on continue de subdiviser les 7 boîtes de taille 2^n restantes, dont la densité est inférieure à $1/5$ (on sait qu'elles ne sont pas mauvaises). En effet, $d(B') \geqslant c \cdot (4/9) > 1/5$ et $d(B') \leqslant d(B) \cdot (16/9) \leqslant (1/5) \cdot (16/9) < c$.
Enfin, supposons qu'il n'y a pas de boîte de taille 2^{n+1} qui contient toutes les mauvaises boîtes. Alors, on peut diviser B en quatre boîtes de taille 2^{n+1}. Pour chacune B' parmi elles, on a $d(B') \leqslant 4(d(B) - c/16) \leqslant 4(1/5 - 1/24) < c$, puisqu'au moins une mauvaise boîte est hors B'. Donc on peut ajouter B' à notre collection si $d(B') \geqslant 1/5$ et continuer de la subdiviser sinon. Il reste à constater que si B est de taille 2 et $d(B) < 1/5$, alors $B \cap A = \varnothing$ et on peut ne plus considérer cette boîte.

$\star$