INSTITUT DES HAUTES ETUDES

POUR LE DEVELOPPEMENT DE LA CULTURE, DE LA SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE EN BULGARIE

http ://balkanski-foundation.org/

Concours Général de Mathématiques «Minko Balkanski»

12 août 2025

Прочетете внимателно!

Част първа и част втора съдържат условията на задачите съответно на френски и английски език. Единствените външни документи, на които имате право, са френски и английски речници. Употребата на калкулатори е позволена.

При оценяването на задачите голяма тежест ще имат **яснотата и стилът** на изложените решения и аргументация. Не използвайте излишна проза в аргументите си, бъдете кратки, точни и ясни. Използването на схеми за онагледяване на разсъжденията Ви е желателно. **Пишете само на езика, който сте избрали (френски или английски).**

Задачите носят еднакъв брой точки.

Разполагате с **4 часа**. Успех!

Première partie

Français

Problème I

Montrer que chaque $2n$ nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_n \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ satisfont

$$(x_1 + \cdots + x_n + y_1 + \cdots + y_n)^2 \geqslant 4n(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n).$$

Problème II

Soit S un ensemble infini d'entiers strictement positifs. On suppose que pour tout $A \subset S$ fini et non-vide, il existe $B \subset S \backslash A$ fini et non-vide tel que

$$\sum_{x \in A \cup B} 1/x$$

est un entier. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui divisent au moins un élément de S.

Problème III

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers naturels distincs non divisibles par n. Supposons que n ne divise pas $a_1 + \cdots + a_n$. Montrer qu'il existe au moins $n - 1$ sous-ensembles non-vides de $\{a_1, \ldots, a_n\}$ dont la somme des éléments est divisible par n.

——— FIN DE L'ENONCE ———

Part II
English

Problem I

Show that any $2n$ real numbers $x_1 \leqslant x_2 \cdots \leqslant x_n \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ satisfy

$$(x_1 + \cdots + x_n + y_1 + \cdots + y_n)^2 \geqslant 4n(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n).$$

Problem II

Let S be an infinite set of positive integers. Assume that for any finite non-empty $A \subset S$, there exists a finite non-empty $B \subset S \backslash A$ such that

$$\sum_{x \in A \cup B} 1/x$$

is an integer. Show that there exist infinitely many primes which divide at least one element of S.

Problem III

Let $n \geqslant 2$ be an integer and $a_1, \ldots, a_n$ be distinct integers non divisible by n. Assume that n does not divide $a_1 + \cdots + a_n$. Show that there are at least $n - 1$ non-empty subsets of $\{a_1, \ldots, a_n\}$ with sum of the elements divisible by n.

——— **END OF PAPER** ———